ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

———————o0o———————

NGUYỄN DOÃN MINH

GIẢI BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRÊN TẬP NGHIỆM BÀI TOÁN CÂN BẰNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
———————o0o———————

NGUYỄN DOÃN MINH

GIẢI BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRÊN TẬP NGHIỆM BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Ngành: Toán giải tích
Mã số: 8 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học
GS.TSKH. NGUYỄN XUÂN TẤN

Thái Nguyên, năm 2019

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan Luận văn là công trình nghiên cứu của riêng tôi dưới sự hướng dẫn trực tiếp của **GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn**.

Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Trong quá trình nghiên cứu, tôi đã kế thừa thành quả khoa học của các nhà khoa học với sự trân trọng và biết ơn.

Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào.

Thái Nguyên, ngày 30 tháng 04 năm 2019

Tác giả

NGUYỄN DOÃN MINH

XÁC NHẬN	**XÁC NHẬN**
CỦA KHOA CHUYÊN MÔN	**CỦA CÁN BỘ HƯỚNG DẪN**

GS.TSKH. NGUYỄN XUÂN TẤN

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của **GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn**.

Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến **GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn** về sự hướng dẫn hiệu quả, tận tình chỉ bảo và động viên tôi trong suốt thời gian nghiên cứu vừa qua.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Đào tạo - Bộ phận Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Trường THCS Phú Lâm cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, ngày 30 tháng 04 năm 2019

Tác giả

NGUYỄN DOÃN MINH

Mục lục

Lời mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Từ những năm 1950, Nikaido và Isoda đã đưa ra khái niệm cân bằng trong toán học, sau đó năm 1958 John Nash đưa ra khái niệm cân bằng trong trò chơi không hợp tác, năm 1972 Ky Fan đã chứng minh sự tồn tại nghiệm của một bất đẳng thức, người ta gọi là bài toán cân bằng kiểu Ky Fan. Từ năm 1994 Blum và Oettli đã phát biểu bài toán cân bằng một cách ngắn gọn như sau:

Cho C là tập hợp cân bằng trong H, $f : C \times C \to H$, $f(u, u) = 0$. Bài toán tìm $u^* \in C$ sao cho $f(u^*, u) \geq 0, \forall u \in C$, bài toán này được gọi là bài toán cân bằng, u^* được gọi là điểm cân bằng, hàm f được gọi là song hàm. Bài toán này bao gồm các bài toán khác trong lý thuyết tối ưu như những trường hợp đặc biệt. Sau đó các nhà toán học đã phát biểu bài toán này cho trường hợp véctơ và trường hợp liên quan đến ánh xạ đa trị.

Trong thực tế nhiều khi ta gặp trường hợp giải bài toán này trên tập nghiệm của bài toán khác, những bài toán như vậy được gọi là bài toán cấp hai. Mục đích của luận văn này là viết một tổng quan về sự tồn tại nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân cũng như bài toán cân bằng và xây dựng một số thuật toán để giải bài tài toán bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm bài toán cân bằng.

Chính vì vậy với mong muốn tìm hiểu nhiều hơn về vấn đề trên, cùng với sự gợi ý giúp đỡ nhiệt tình của **GS.TSKH. Nguyễn Xuân Tấn**, tôi chọn đề tài: **"Giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm bài toán cân bằng"** làm luận văn thạc sỹ của mình.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích mà đề tài đặt ra là nghiên cứu một số phương pháp giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm của bài toán cân bằng.

(i) Đề tài nghiên cứu chỉ ra phương pháp đạo hàm tăng cường giải bài toán $BVI(F, G, C)$ với điểm mới là sử dụng tính chất co của ánh xạ $T_\lambda = I - \lambda F$ với $\lambda > 0$, F là ánh xạ giá đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz, ánh xạ G đơn điệu mạnh ngược, theo P.N. Anh.

(ii) Kết hợp giữa phương pháp dưới đạo hàm kết hợp kỹ thuật điểm bất động đưa ra thuật toán để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm của bài toán cân bằng $VIEP(F, f, C)$ với ánh xạ giá F đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz, song hàm f giả đơn điệu thỏa mãn điều kiện tiền đơn điệu chặt.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Với các mục đích đặt ra như trên, trong đề tài này chúng tôi nghiên cứu các nội dung sau về phương pháp giải bài toán $VIEP(F, f, C)$:

(i) Nghiên cứu xây dựng phương pháp ánh xạ nghiệm để giải bài toán cân bằng trên giả thiết song hàm f là giả co chặt, đồng thời chứng minh được tính tựa không giãn và tựa co của ánh xạ nghiệm:

$$S(u) = argmin\left\{\lambda f(u, v) + \frac{1}{2}\|v - u\|^2 : v \in C\right\}, \forall u \in C.$$

(ii) Nghiên cứu xây dựng thuật toán giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm bài toán cân bằng với giả thiết song hàm f giả đơn điệu, liên tục Lipschitz và hàm giá F liên tục Lipschitz, đơn điệu mạnh.

4. Phương pháp nghiên cứu

Thu thập tài liệu và các kết quả liên quan tới các bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán cân bằng, các phương pháp giải các bài toán trên, để chỉ ra được những điểm mạnh của những phương pháp mới giải bài toán tìm nghiệm của bài toán $VIEP(F, f, C)$, đưa ra các thuật toán mới được tạo bởi các dãy lặp khá đơn giản với điều kiện của song hàm f đơn điệu mạnh và ánh xạ giá F đơn điệu, đồng thời chứng minh sự hội tụ mạnh của các dãy này về một nghiệm của bài toán $VIEP(F, f, C)$.

5. Dự kiến kết quả nghiên cứu

Đề tài là một tổng quan về những kiến thức liên quan tới các kết quả về phương pháp giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm bài toán cân bằng.

Đề tài được chia thành các chương.

Chương 1 Viết về những kiến thức cơ bản của lý thuyết không gian Hilbert. Các tính chất liên tục, lồi của ánh xạ. Một số định lý tồn tại nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán cân bằng.

Chương 2 Viết về một số thuật toán giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm của bài toán cân bằng.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Khi phát biểu một bài toán, người ta phải quan tâm bài toán được đặt ra ở đâu. Tức là phải quan tâm tới không gian của bài toán. Vậy trước hết ta phải nhắc lại một số kiến thức liên quan tới không gian, sau đó tới một số tính chất của chúng.

Một không gian tuyến tính thực (phức) cùng với một hàm $\langle \cdot, \cdot \rangle$ song tuyến tính thực (phức), đối xứng thỏa mãn điều kiện

$$\langle u, u \rangle \geq 0, \ \ \forall u \in H, \qquad\qquad \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0,$$

được gọi là không gian tiền Hilbert thực (phức).

Trong không gian tiền Hilbert ta định nghĩa được chuẩn của $u \in H$ như sau: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$, ta dễ dàng chứng minh được đây là một chuẩn trên H và từ chuẩn này ta định nghĩa được khoảng cách giữa hai điểm u, v như sau: $\rho(u, v) = \|u - v\|$; khi ấy H, ρ trở thành không gian định chuẩn.

Nếu H đầy đủ với chuẩn này thì không gian với tích vô hướng được gọi là không gian Hilbert. Ta dễ dàng nhận thấy trong không gian Hilbert H, cấu trúc tôpô và cấu trúc đại số tương đương nhau, tức là các phép tính đại số liên tục với tôpô sinh bởi metric.

Tiếp theo ta đưa vào khái niệm ánh xạ trong không gian Hilbert.

Cho H_1, H_2, H_3 là không gian Hilbert, phép chuyển T chuyển một phần tử từ H_1 vào H_2 được gọi là một ánh xạ (hay một toán tử), ta có thể phân loại các ánh xạ đưa vào cấu trúc tôpô và cấu trúc đại số.

(i) $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$ với $\alpha, \beta \in R, u, v \in H_1$ thì T được gọi

là ánh xạ tuyến tính; ngược lại T được gọi là ánh xạ phi tuyến;

(ii) T được gọi là liên tục nếu $u \to u$ thì $T(u) \to T(u)$;

(iii) T có đồ thị đóng thì được gọi là ánh xạ đóng;

(iv) T chuyển từ tập giới nội thành tập compact tương đối ($A \subset H_1$, $\overline{TA}$ là compact) thì T được gọi là ánh xạ compact.

Tiếp theo ta nêu một số tính chất của ánh xạ.

(i) Cho T_1, T_2 liên tục (đóng, compact) thì $T_1 + T_2$ cũng liên tục (đóng, compact);

(ii) Cho T là liên tục (đóng, compact) và $\alpha \in R$ thì αT cũng là liên tục (đóng, compact);

(iii) Cho $T_1 : H_1 \to H_2, T_2 : H_2 \to H_3$; T_1, T_2 liên tục (đóng, compact) thì $T_1.T_2$ cũng liên tục.

1.1 Không gian Hilbert và một số tính chất

Trong phần này ta nhắc lại định nghĩa không gian $Hilbert$, một số khái niệm cơ bản thuộc không gian $Hilbert$ như tính trực giao, hình chiếu, toán tử compact và toán tử bị chặn.

Định nghĩa 1.1 *Cho H là một không gian tuyến tính thực. Tích vô hướng xác định trên H là một ánh xạ được xác định như sau:*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H &\to R, \\ (u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle \ ; \end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

(a) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in H;$

(b) $\langle u + v, t \rangle = \langle u, t \rangle + \langle v, t \rangle, \forall u, v, t \in H;$

(c) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \forall \lambda \in R, \forall u, v \in H;$

(d) $\langle u, u \rangle \geq 0, \forall u \in H, \qquad \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.$